Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Для билета

Вариант задания 1.

№4.

$$\left| \frac{x(x^2-3)+(x+2)^2-(x^3+6)}{x+\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}-1} \right| = a^2+1$$

Раскроем модуль с плюсом.

$$\frac{x^3-3x+x^2+4x+4-x^3-6}{x+\sqrt{9}-1} = a^2+1.$$

Рассмотрим случай, когда: (~~Пусть~~ $\sqrt{9}=3$, (он может быть равен -3, т.к. в усл. об этом ничего не сказ)

$$\frac{x^2+x-2}{x+2} = a^2+1$$

Огр: $x \neq -2$.

$$\frac{(x+2)(x-1)}{x+2} = a^2+1.$$

$$x-1 = a^2+1.$$

$$x-2 = a^2$$

$$x = a^2+2$$

a^2+2 – положительное число, т.к. $a^2 \geq 0$, и $2>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ у уравн. всегда есть положит. корень $x = a^2+2 \Rightarrow$

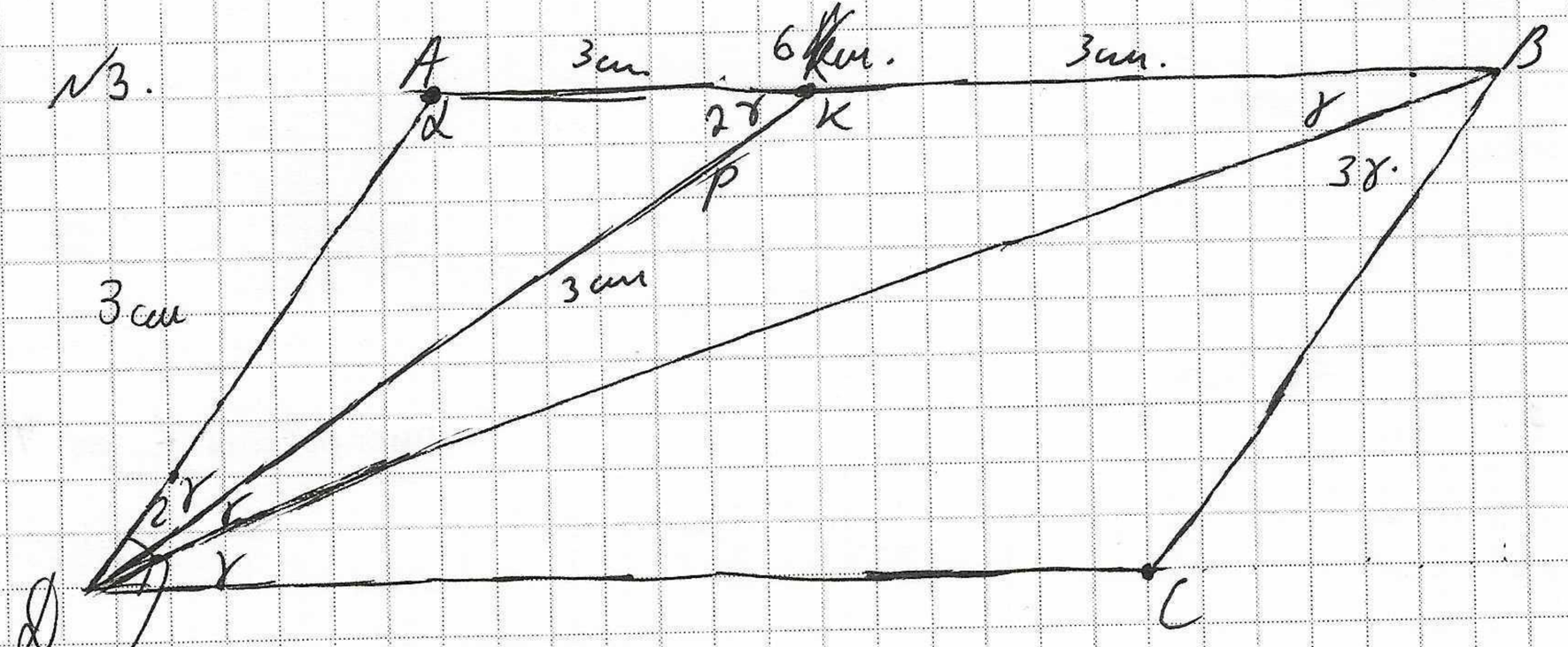
$$\begin{array}{r|l} -x^2+x-2 & x+2 \\ \underline{x^2+2x} & x-1 \\ -x-2 & \\ \underline{-x-2} & \\ 0 & \end{array}$$

Можно использовать оборот листа для записи решений

Нет такого a, при котором оно имело бы единственный ~~корень~~ отрицательный корень.

Ответ: такого a не существует.

№3.



Пусть угол равен γ, провед. окр-ть p, окр-ти отсек. от н/пл β $\Delta \Rightarrow AK = 3$ см $= AD$ $BK = AB - AK =$

$= 6 - 3 = 3$ см. $\angle KDB = 3\gamma - 2\gamma = \gamma$;

$\angle KBD = \gamma$
$\angle KDB = \gamma$ $\Rightarrow \Delta DKB$ - р/б, (по усл. / из-за окр-ти диаг. делит углы в отн. 3:1.)

на т.к. равны $\angle$ при осн. $\Rightarrow DK = KB = 3$ см. $\Rightarrow$

$\# \Delta DAK$, $AD = DK = AK = 3$ см. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta DAK$ - равн. равносторонний $\Rightarrow \angle DAB = 60° =$

$= 2$

$S_{ABCD} = AD \cdot AB \cdot \sin 2 = 3 \cdot 6 \cdot \sin 60 =$

$= 18 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$ см^2.

Ответ: $9\sqrt{3}$ см^2.

olymp.bmstu.ru

№1.

v_c - скорость Сани

v_A - скорость Арсения

v_p - скорость Ромы

$$\begin{cases} (v_c + v_A) \cdot 9 = 0,5 \\ (v_p + v_A) \cdot 12 = 0,5 \\ (v_c + v_p) \cdot 18 = 0,5 \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} 9v_c + 9v_A = 0,5 \\ 12v_p + 12v_A = 0,5 \\ 18v_c + 18v_p = 0,5 \end{cases}$$

$$27v_c + 21v_A + 30v_p = 1,5 \quad / \div 3.$$

$$9v_c + 7v_A + 10v_p = 0,5.$$

$$9v_c + 7v_A + 10v_p = 9v_c + 9v_A.$$

$$10v_p - 2v_A = 0$$

$$10v_p = 2v_A.$$

$$5v_p = v_A.$$

$$\begin{cases} 12v_p + 12v_A = 0,5 \\ 12v_p + 12 \cdot 5v_p = 0,5. \\ 72v_p = \frac{1}{2}. \\ v_p = \frac{1}{144} \ \frac{кг}{мин}. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_A = \frac{5}{144} \ \frac{кг}{мин}$$

$$(v_c + v_A) \cdot 9 = 0,5 \quad / \cdot 2.$$

$$18(v_c + v_A) = 1.$$

$$v_c + v_A = \frac{1}{18}.$$

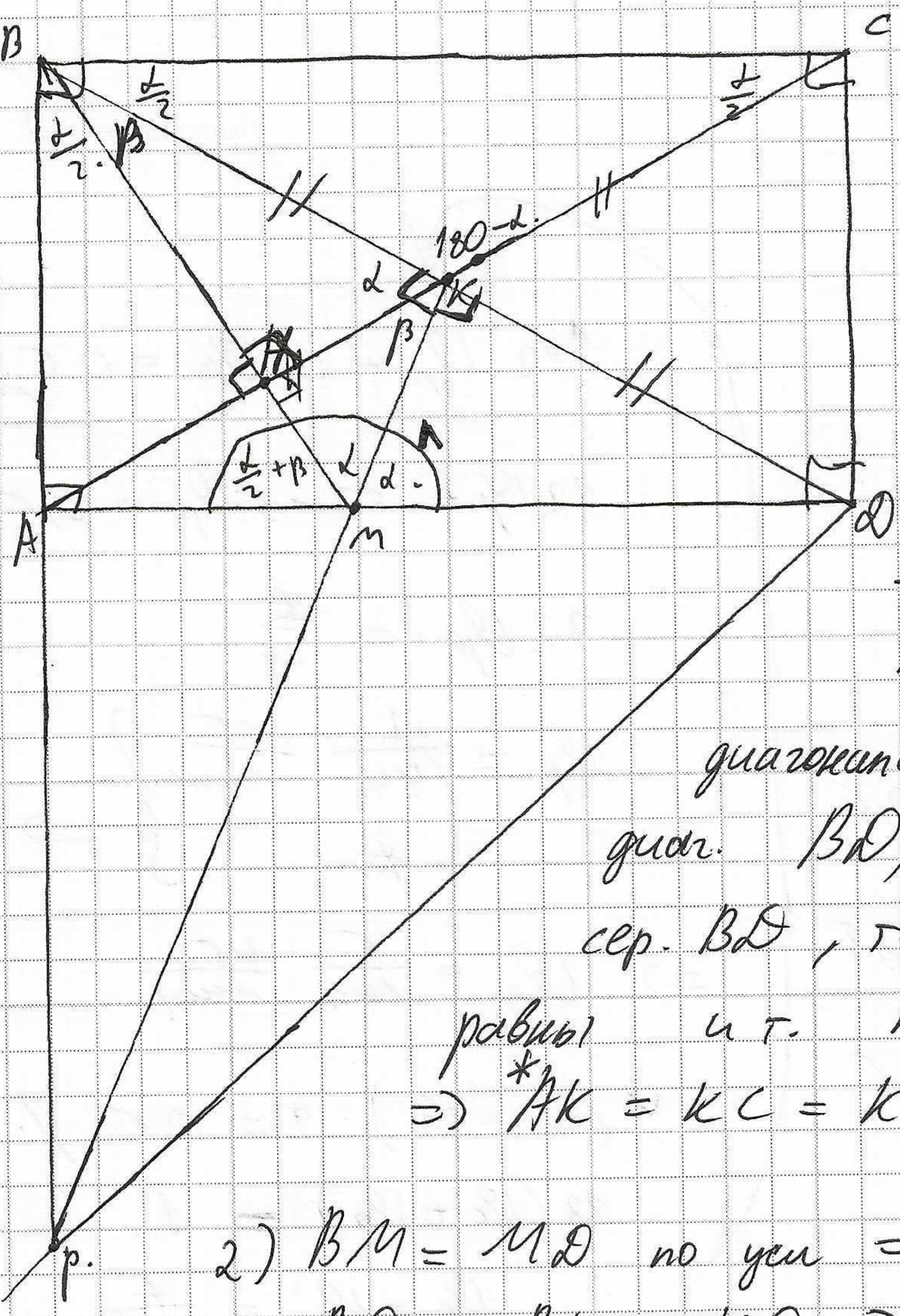
$$v_c = \frac{1}{18} - \frac{5}{144} = \frac{8}{144} - \frac{5}{144} = \frac{3}{144} \ \frac{кг}{мин}.$$

$$\begin{cases} v_c + v_A + v_p = \\ = \frac{3}{144} + \frac{5}{144} + \frac{1}{144} = \\ = \frac{9}{144} \ \frac{кг}{мин}. \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ им понадобится $\frac{1 кг}{\frac{9}{144}} =$

$= \frac{144}{9} = 16$ мин $\Rightarrow$ Ответ: 16 мин

№5.



$ABCD$ – прям-уг.

$AC = 3,2$

$BM = MD$

$AK = KC = \frac{3,2}{2} = 1,6.$

Решение:

1) K – середина диаг. в прям. уг $\Rightarrow$ K – т. пересеч. диагоналей $\Rightarrow$ т. K лежит на диаг. BD, $AC = BD = 3,2$, и т. K – сер. BD, т.к. в прям уг. диаг. равны и т. пересеч. делятся пополам $\Rightarrow$ $*$ $AK = KC = KB = KD = \frac{3,2}{2} = 1,6.$

2) $BM = MD$ по усл $\Rightarrow$ $\triangle BMD$ – р/б с осн. BD, $BK = KD \Rightarrow MK$ – мед. провед к осн. р/б. $\triangle BMD \Rightarrow MK$ – бис-са и выс, пусть $\angle BMD = 2\alpha$ $\Rightarrow$ $\angle BMK = \angle KMD = \alpha$, пусть $\angle KBM = \beta$. $*$ $\triangle BMK \Rightarrow 180 = 90 + \alpha + \beta \Rightarrow$ $\Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ$; $\angle MKM = 90 - \alpha = \beta$ (по сумме $\angle$ в $\triangle MKM$), $\angle BKM = 90 - \beta = \alpha$ (по сумме углов в $\triangle BKM$).

3) $\angle BKC = 180 - \angle BKA = 180 - \alpha$, т.к. они смеж. $*$ $\Rightarrow$ $\triangle BKC$ – р/б с осн $BC \Rightarrow \angle CBK = \angle BCK =$ $= \frac{180 - 180 + \alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}.$

olymp.bmstu.ru

4) $\angle ABM = 90 - \angle MBK - \angle KBC = 90 - \beta - \frac{\alpha}{2} =$

$= \alpha + \beta - \beta - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}.$

5) $\triangle ABM$:

$\angle AMB = 180 - 90 - \frac{\alpha}{2} = 90 - \frac{\alpha}{2} = \alpha + \beta - \frac{\alpha}{2} =$

$= \frac{\alpha}{2} + \beta.$ (по сумме $\angle$ в $\triangle$).

6) $\Rightarrow \frac{\alpha}{2} + \beta + 2\alpha = 180° \Rightarrow 180 = 90 + \frac{3\alpha}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{3\alpha}{2} = 90 \Rightarrow 3\alpha = 180 \Rightarrow \alpha = 60° \Rightarrow \beta = 90 - 60 =$

$= 30°$

7) $\triangle ABK$

$* \Rightarrow \triangle ABK$ - р/б, с углом $\alpha = 60° \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle ABK$ - равн. стор. $\Rightarrow BH$ - выс $\Rightarrow$ мед., бисс. $\Rightarrow$

$\Rightarrow AH = \frac{AK}{2} = \frac{1,6}{2} = 0,8.$

8) $\triangle PBD$

PK - выс мед., выс. $\Rightarrow \triangle PBD$ - р/б, с осн BD; $\angle PBD = \frac{\alpha}{2} + \beta = 30 + 30 = 60° \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle PBD$ - р/б, с углом в 60° $\Rightarrow \triangle PBD$ - равн. стор. $\Rightarrow PD = PB = BD = 3,2$

Ответ: $AH = 0,8$; $PD = 3,2$.

№2.

$$(y-2)(3x-12) = 5x^2 - 21x + 4$$

$$3xy - 6x - 12y + 24 = 5x^2 - 21x + 4.$$

$$3xy - 12y = 5x^2 - 15x - 20.$$

$$3(xy - 4y) = 5x^2 - 15x - 20.$$

~~№2~~

а) $B = \dfrac{5x^2 - 15x - 20}{xy - 4y}$ Опр.:

$$3y(x-4) = 5x^2 - 15x - 20 \quad | :2.$$

$$3y = \frac{5x^2 - 15x - 20}{x-4} \qquad \text{Опр: } x \neq 4$$

$$\begin{array}{r|l} 5x^2 - 15x - 20 & x-4. \\ \hline 5x^2 - 20x & 5x+5 \\ \hline 5x - 20 & \\ 5x - 20 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\Rightarrow 3y = 5x + 5.$$

$$y = \frac{5(x+1)}{3} \Rightarrow y \vdots 5.$$

~~$3\left(\frac{5x(x+1)}{3} - \frac{20(x+1)}{3}\right) = 5x^2 - 15x - 20.$~~

~~$5x(x+1) - 20(x+1) = 5x^2 - 15x - 20.$~~

~~$5x^2 + 5x - 20x - 20 = 5x^2 - 15x - 20$~~

$x+1 \vdots 3$, т.к. y - целое, а $5 \not\vdots 3 \Rightarrow x \equiv 2 \pmod 3$

$\frac{3}{5}y - 1 = x. \Rightarrow \frac{3}{5}y$ - целое и y - целое

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Вариант задания 1

$5x^2 - 15x - 3xy + 12y - 24 + 4 = 0$

$5x^2 - 3x(5-y) + 12y - 20 = 0$

По F. Виета

$$x_1 + x_2 = \frac{3(5-y)}{5}$$

$$x_1 x_2 = \frac{12y - 20}{5}$$

$$D = (-3(5-y))^2 - 20(12y - 20) = 9(25 - 10y + y^2) -$$

$$- 240y + 400 = 225 - 90y + 9y^2 - 240y + 400 =$$

$$= 625 - 330y + 9y^2 = 9y^2 - 330y + 625.$$

$$x_1 = \frac{3(5-y) + \sqrt{D}}{10}$$

$$x_2 = \frac{3(5-y) - \sqrt{D}}{10}.$$

$$x_1 x_2 = \frac{(3(5-y) + \sqrt{D})(3(5-y) - \sqrt{D})}{100} = \frac{9(5-y)^2 - D}{100} =$$

$$= \frac{225 - 90y + 9y^2 - 9y^2 + 330y - 625}{100} = \frac{240y - 400}{100} =$$

$$= 2{,}4y - 4. \Rightarrow y = 10.$$

Можно использовать оборот листа для записи решений

